تعريف:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R و B، D مجموعات جزئية في A، نسمي المجموعة

$$[B,D] = \{[b,d] \,;\, b\in B,\ d\in D\}$$

جداء المجموعتين B, D في A.

+ مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R، وليكن B, D, K موديولات جزئية في A عندئذ:

1- $[B,D] = [D,B]$

2- $[B+D,K] = [B,K]+[D,K]$

3- $[B,[K,D]] \subseteq [D,[B,K]]+[K,[D,B]]$

4- $[B\cap K,D] \subseteq [B,D]\cap[K,D]$

البرهان:

1- ليكن $x\in[B,D]$ عندئذ:

$$x=[b,d] \,,\, b\in B,\ d\in D$$

$$x=[b,d] = -[d,b] = [-d,b] \in [D,B]$$

$$\Rightarrow [B,D] \subseteq [D,B]$$

بنفس الطريقة نحصل على الاحتواء المعاكس.

2- ليكن $y\in[B+D,K]$ عندئذ:

$$y=[a,k] \;;\; a\in B+D,\ k\in K$$

$$a=b+d \;;\; b\in B,\ d\in D$$

$$\Rightarrow y=[a,k]=[b+d,k]$$

$$=[b,k]+[d,k] \in [B,K]+[D,K]$$

الموضوع:

$\Rightarrow [B+D, K] \subseteq [B, K]+[D, K]$ (1)

ليكن $z \in [B, K]+[D, K]$ عندئذ

$z = b_1+b_2 \quad ; \quad b_1 \in [B, K] \; , \; b_2 \in [D, K]$

$\Rightarrow b_1 = [b, k_1] \quad , b_2 = [d, k_2] \quad ; b \in B \; , d \in D \; , k_1, k_2 \in K$

$z = b_1+b_2 = [b, k_1] + [d, k_2] =$

$= [b, k_1] + [d, k_1] - [d, k_1] + [d, k_2]$

$= [b+d, k_1] + [d, k_2-k_1]$

$\in [B+D, K] + [D, K]$

و بما أن $[D, K] \subseteq [B+D, K] \Leftarrow$

$[B+D, K]+[D, K] = [B+D, K]$

$\Rightarrow [B+D, K] \supseteq [B, K]+[D, K]$ (2)

من علاقتي الاحتواء (1) و (2) ينتج المساواة.

3- ليكن $x \in [B, [K, D]]$ عندئذ $x \in [a, b]$

حيث $a \in B$ و $b \in [K, D]$

$b = [k, d] ; \quad k \in K \; ; d \in D$

$x = [a, b] = [a, [k, d]] = -[k, [d, a]] - [d, [a, k]]$

$\in [K, [D, B]] + [D, [B, K]]$

4- (أ)

/ /

الموضوع :

*تمهيد:
ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R
وليكن I, J مثاليين في A عندئذ كل من:
$I \cap J$ و $I + J$
مثالي في A.

البرهان:
- نثبت أن كل من $I \cap J$ ، $I+J$ هو مودول جزئي في A
- ليكن $a \in A$ وليكن:
⊙ $x \in I \cap J$ عندئذ

$$d_a(x) = d[a, x] \in I \quad ; \quad d_a(x) = [a, z] \in J$$

$$\Rightarrow d_a(x) \in I \cap J$$

$\Leftarrow I \cap J$ مثالي في A

⊛ $x \in I + J$ عندئذ: فإن

$$x = y + z \quad ; \quad y \in I \quad , z \in J$$

$$d_a(x) = [a, x] = [a, y + z] = [a, y] + [a, z]$$

$$= \underbrace{d_a(y)}_{\in I} + \underbrace{d_a(z)}_{\in J} \in I + J$$

وهذا يبين أن $I + J$ مثالي في A.

تعريف:
ليكن A جبر لي فوق الحلقة R، و I, J مثاليين في A
لنأخذ المجموعة

$$\mathcal{L} = \{[a, b] ; a \in I, b \in J\}$$

نسمي أصغر مودول جزئي في A يحوي المجموعة $\mathcal{L}$

بالمودول الجزئي المولد بالمجموعة $\mathcal{L}$ ونرمز له $[I,J]$
وهو أصغر مودول جزئي في A يحوي $\mathcal{L}$
ويساوي تقاطع جميع المودولات الجزئية في A والتي كل منها يحوي $\mathcal{L}$.

تمهيدية: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R، I، J مثاليين من A، عندئذ:

1- $[I,J]=[J,I]$

2- $[I,J]$ مثالي في A

البرهان:

1- لنفرض أن $\mathcal{L}_1=\{[a,b];\ a\in I, b\in J\}$
المجموعة المولدة للمودول $[I,J]$

و $\mathcal{L}_2=\{[d,c];\ d\in J,\ c\in I\}$
المجموعة المولدة للمودول $[J,I]$

ليكن $x\in\mathcal{L}_1$ عندئذ: $x=[a,b];\ a\in I, b\in J$

عندئذ:

$$x=[a,b]=-[b,a]=[-b,a]\in\mathcal{L}_2$$

$$\Leftarrow\ \mathcal{L}_1\subseteq\mathcal{L}_2$$

بنفس الطريقة نثبت أن $\mathcal{L}_2\subseteq\mathcal{L}_1$ ومنه

$$\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_1$$

وهذا يبين أن المودول $[I,J]=$ المودول $[J,I]$.

2- إن $[I,J]$ حسب التعريف مودول جزئي في A

ليكن $a\in A$، $x\in\mathcal{L}_1$ عندئذ:

$$x=[y,z]\ ;\ y\in I,\ z\in J$$

$$\Rightarrow\ d_a(x)=d_a[a,x]=[a,[y,z]]$$

$$=-[y,[z,a]]-[z,[a,y]]$$

$$= [y, [a, z]] - [z, [a, y]] = [\underset{I}{y}, \underset{J}{d_a(z)}] - [\underset{J}{z}, \underset{I}{d_a(y)}]$$

$$= [y, d_a(z)] + [d_a(y), z] \in [I, J]$$

$\in \mathcal{L}_1$ ... $\in \mathcal{L}_1$ تكون هذه العناصر من المجموعة المولدة للمجموعة

ومنه استنتج أن $d_a(\mathcal{L}_1) \subseteq [I, J]$

$\Rightarrow d_a([I, J]) \subseteq [I, J]$

ومنه استنتج أن $[I, J]$ مثالي في A.

* تعريف: لتكن A جبر لي فوق الحلقة R ، و I مجموعة جزئية وغير خالية في A نقول أن I مثالي مميز في A إذا كان:

1. I مودول جزئي في A
2. $\forall D \in Der(A) ; D(I) \subseteq I$

- ينتج من التعريف مباشرة أن كل مثالي مميز في A هو مثالي في A.

مبرهنة: لتكن A جبر لي فوق الحلقة R ، جداء مثاليين مميزين في A هو مثالي مميز في A.

البرهان:

لتكن A ، I ، J مثاليين مميزين في A

لنأخذ المجموعة:

$$\mathcal{L} = \{[a, b] ; a \in I, b \in J\}$$

ولنأخذ المودول الجزئي $[I, J]$ المولد بالمجموعة $\mathcal{L}$

لتكن $D \in Der(A)$ ، $x \in \mathcal{L}$

$x = [a, b] ; a \in I , b \in J$

وأن

$$D(x) = D([a, b]) = [Da, b] + [a, D(b)]$$

الموضوع: ....

$\in [I, J]$

ومنه نجد أن

$D([I,J]) \subseteq [I,J]$

وبالتالي فالمودول $[I,J]$ مثالي مميز في A.

تعريف: ليكن A جبرًا لي فوق الحلقة R نسمي المجموعة

$Z(A) = \{ a ;\ a \in A ;\ [a, x] = 0 ;\ \forall x \in A \}$

مركز الجبر A.

تمهيدية:

ليكن A جبرًا لي فوق الحلقة R، إن مركز الجبر A $Z(A)$ هو مثالي مميز في A.

البرهان:

واضح من التعريف $Z(G) \neq \emptyset$ لأن $0 \in Z(G)$

$\forall \alpha, \beta \in R,\ a, b \in Z(A)$

$\forall x \in A :\ [\alpha a + \beta b, x] = [\alpha a, x] + [\beta b, x]$

$= \alpha [a, x] + \beta [b, x] = 0$

$\Leftarrow$ $\alpha a + \beta b \in Z(A)$ أي أن $[Z(A), +)$ مودول جزئي في A.

ليكن $D \in Der(A)$، $z \in Z(A)$ عندئذ أيًا كان $x \in A$

$D([a, x]) = [D(a), x] + [a, D(x)]$

$\Rightarrow [D(a), x] = [a, D(x)] - D([a, x]) = 0$

وبالتالي فإن $D(a) \in Z(A)$ وهذا البرهان أن $Z(A)$ مثالي مميز في A.

حلقة الخارج

ليكن A حلقة فوق الحقل R، و I مثاليا من A لنعرف على A علاقة ρ بالشكل الآتي:

$\forall x, y \in A : x \rho y \Leftrightarrow x - y \in I$

فنجد أن ρ هي علاقة تكافؤ على A

- لنرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر $a \in A$

$\bar{a} = a + I = \{x ; x \in A, x \rho a\}$

- نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ للعلاقة ρ بالشكل

$A/I = \{\bar{a} = a + I ; a \in A\}$

لنعرف على هذه المجموعة A/I العمليات الآتية:

$\forall a+I, b+I \in A/I ; \forall \alpha \in R$

- جمع داخلي $(a+I) + (b+I) = (a+b) + I$

- ضرب داخلي $[a+I, b+I] = [a, b] + I$

- خارجي $\alpha(a+I) = \alpha a + I$

المجموعة A/I بالنسبة للعمليات السابقة تشكل حلقة فوق R.

تمهيدية:

كل مثالي من A هو نواة لتشاكل جبر لي غامر.

البرهان:

ليكن B مثالي من A عندئذ A/B جبر لي

لدينا العلاقة $f : A \to A/B$

/ /

الموضوع:

$x \mapsto x+B$

- عند نثبات f دالة

- و هو تشاكل لأن

$\forall x,y \in A$

. $f(x+y) = (x+y)+B = (x+B)+(y+B) = f(x)+f(y)$

. $f([x,y]) = [x,y]+B = [x+B, y+B] = [f(x), f(y)]$

. $\forall \alpha \in R \; ; \; f(\alpha x) = \alpha x+B = \alpha(x+B) = \alpha f(x)$

- $\forall \bar{a} \in A/B \; ; \; \bar{a} = a+B \; , \; a \in A$

$f(a) = a+B = \bar{a}$

لنبرهن أن $B = \ker f$ ليكن $b \in B$ عندئذ:

$\bar{b} = b+B = B$

$f(b) = (b+B) = B \Rightarrow b \in \ker f$

$B \subseteq \ker f$

الاحتواء المعاكس بنفس الأسلوب.

ينتج أن $B = \ker f$ وهو المطلوب

تمرين: كل مثالي في جبر لي هو جبر لي جزئي.

الحل:

ليكن A جبر لي فوق R و I مثالي في A.

- إن I هو أولا جبر في A

- ليكن $a, b \in I$ عندئذ . $[a,b] = d_a b \in I$

تعريف: ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي، نقول ان f تماثل أو ايزومورفيزم إذا كان f متباين وغامر ونرمز لذلك $A \cong A'$.

*

تمرين: ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي عندئذ، أثبت ان Ker f مثالي في A وان Im f جبر جزئي في A'.

مبرهنة التماثل الاولى:

ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي، عندئذ:

1- $A/Ker(f) \cong Im(f)$

2- f غامر فان $A/Ker f \cong A'$

مبرهنة: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ:

$A/Z(A) \cong Inn(A)$

البرهان:

بما ان Z(A) مثالي في A فان A/Z(A) جبر لي.

وجدنا سابقاً ان Inn(A) مثالي في جبر لي Der(A) وبالتالي فان Inn(A) جبر لي جزئي في Der(A) أي ان Inn(A) جبر لي.

أيضاً وجدنا سابقاً ان التطبيق $\varphi: A \to Der(A)$ المعرف بالشكل

$\varphi(a) = d_a \quad \forall a \in A$

هو تشاكل جبور لي (الاثبات سابقاً)

وبالتالي فان $\varphi: A \to Inn(A)$ هو تشاكل جبور لي وهو غامر

$\varphi(a) = d_a$

لانه إذا كان $d \in Inn(A)$ فان $c \in A$ وبالتالي $\varphi(c) = d_c$ ومنه حسب نظرية التماثل الاولى:

$$A/Ker\varphi = Inn A$$

لنبرهن على أن $\ker\psi = Z(G)$

$a \in \ker\psi \;;\; \psi(a) = d_a$

$\Rightarrow \psi(a) = d_0$

$\Rightarrow d_a = d_0$

$\forall x \in A;\; d_a(x) = d_0(x) = 0 \Rightarrow [a,x] = 0$

$\Rightarrow a \in Z(A)$

$\Rightarrow \ker\psi \subseteq Z(G)$

ليكن $b \in Z(G)$ عندئذ:

$\forall x \in A;\; [b,x] = 0 \Rightarrow d_b(x) = 0 = d_0(x)$

$\psi(b) = d_b = d_0 \Leftarrow d_b = d_0 \Leftarrow$

$Z(A) \subseteq \ker\psi \Leftarrow b \in \ker\psi$ ومنه

$Z(A) = \ker\psi \Leftarrow$

انتهت المحاضرة